

単振動の学習です

ばねに吊したおもりが上下に振動する運動「ばね振り子」と、糸に吊したおもりが左右に振動する運動「単振り子」について学習します。これらの運動を「単振動」といいます。

おもりが1回振動（1往復）する時間 T [s] を（ 周期 ）といいます。

ばね振り子の周期は、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (m :おもりの質量, k :ばね定数) となります。

単振り子の周期は、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l :糸の長さ, g :重力加速度) となります。

時計とは「時」を刻む道具。時計は、これらの振り子を利用して作られました。

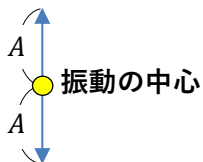
単振動で1秒間に往復する回数 f [(^{ヘルツ}Hz)] を（ 振動数 ）といいます。

振動数 f と周期 T の間には $f = \left(\frac{1}{T}\right)$ の関係が成り立ちます。

問 単振動で2回振動する時間が0.40秒のとき、周期 $T = (0.20\text{ s})$ 、振動数 $f = (5.0\text{ Hz})$ である。

$$T = 0.40\text{ s} \div 2\text{ 回} = 0.20\text{ s} \quad f = \frac{1}{0.20\text{ s}} = 5.0\text{ Hz}$$

● 単振動とはどんな動き方なの？



一直線上を往復運動（振動）します。

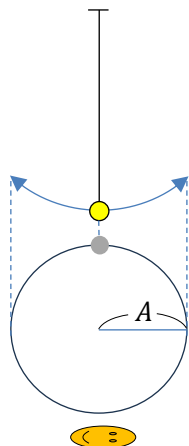
振動の中心から両側に同じ距離動きます。

この距離 A [m] を（ ^{しんぷく} 振幅 ）といいます。

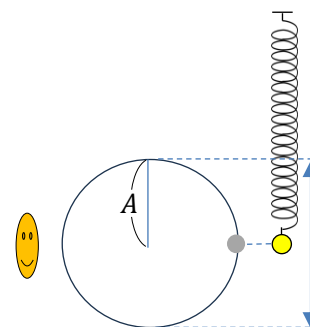
振動の中心を通過する瞬間の速さが最大で、減速しながら端に向かいます。

端で一瞬速さが0m/sになり、今度は中心に向かい加速します。

突然でビックリすると思いますが、半径 A [m]、周期（1回転する時間） T [s] で物体を等速円運動させ、それを真横から見ると、何と単振動と全く同じ動きになるのです！

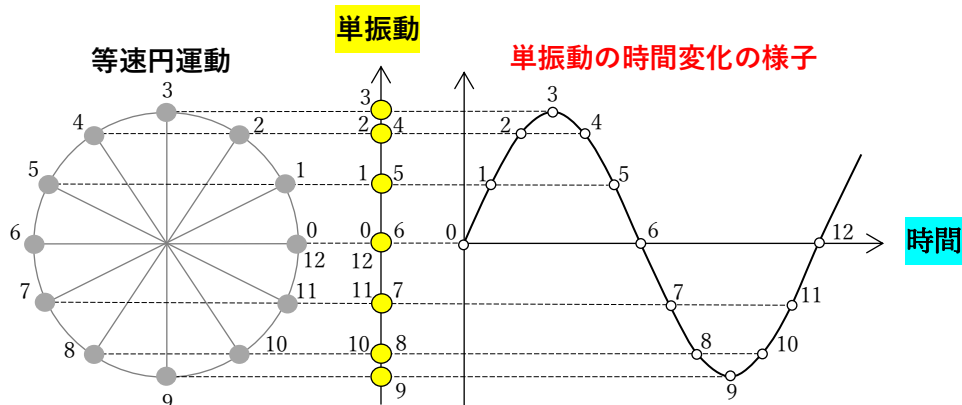


振幅 A は端の手を放す位置で決まります。



振幅 A はつり合いの位置から上に持ち上げて、または下に引き下げて手を放した位置で決まります。

等速円運動と単振動の位置関係を細かく見ると下図のようになります。



● なぜ等速円運動を横から見た動きと同じになるの？

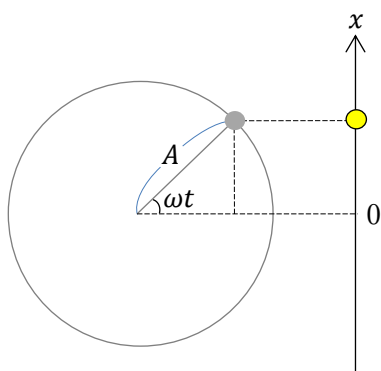
物体の動きは力で決まります。物体を、等速円運動を横から見たように運動させるために必要な力と、実際に単振動している物体にはたらく力が同じ形をしているのです。

その力 F [N] は、 $F = -kx$ という形をしています。 k [N/m] は定数、 x [m] は振動の中心を原点とした物体の座標です。 x を (変位) といいます。

● 初めに、等速円運動を横から見たように運動させる力が $F = -kx$ となることをつぎのステップで導いてみましょう

- ① 等速円運動から単振動の「変位」, 「速度」, 「加速度」の式を求める
- ② 加速度を運動方程式 $ma = F$ に代入して「力」を求める

① 「変位」を求めよう



等速円運動で 1 秒間あたりに回転する角度 を角速度といいます。角速度を ω [rad/s] とすると、 t [s] 間に回転する角度 θ [rad] は $\theta = (\omega t)$ です。ちなみに θ に 1 回転の角度 2π [rad], t に 1 回転の時間 (周期) T を代入すると、 $T = (\frac{2\pi}{\omega})$ の公式が導かれます。

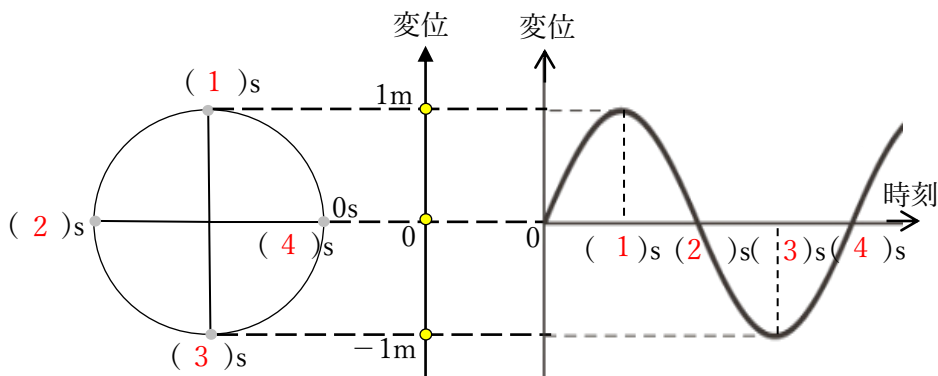
左図より、単振動の変位 x [m] はつぎのようになります。

$$x = (A \sin \omega t)$$

ところで、単振動では ω と θ の呼び名が変わります。 ω を (角振動数), θ を (いそう位相) と呼びます。

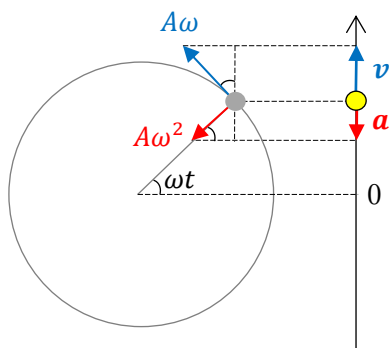
問 $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s のとき、右図の

() 内に時刻を入れよ。



この単振動の **振幅**は (1.0) m, **周期**は (4.0) s, **振動数**は (0.25) Hz である。
時刻 2s のときの**位相**は (π) rad である。

「速度」と「加速度」を求めよう



等速円運動の速度は円の接線方向で (半径) × (角速度) = $A\omega$,
加速度は円の中心方向で (半径) × (角速度)² = $A\omega^2$ です。

この速度と加速度の矢印を横から見たときの長さが、単振動の速度 v [m/s], 加速度 a [m/s²] となります。

したがって、左図よりつぎのようになります。

$$v = (A\omega \cos \omega t) , \quad a = (-A\omega^2 \sin \omega t)$$

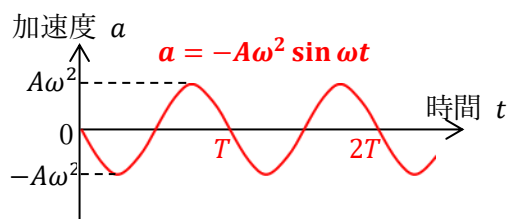
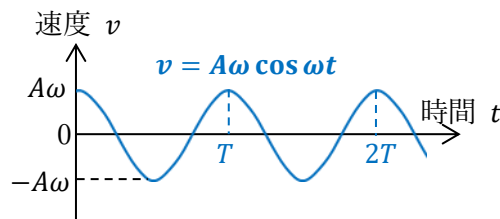
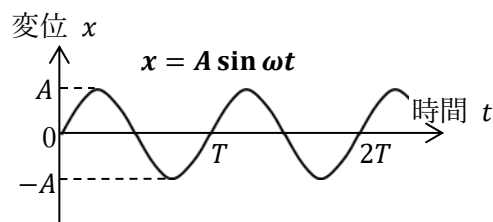
また、 a を x を用いて、 $a = (-\omega^2 x)$ と表すことができます。

ここで注意してほしいことがあります。

等速円運動の速度と加速度の式は、大きさのみを示したもので向きを含んでいません。

一方、単振動の式は、正負の値で向きを含んでいます。

単振動の変位、速度、加速度を、横軸に時間をとったグラフで表すと右図のようになります。



問 次の () に「 0 , A , -A 」のうち適するものを入れよ。

単振動で速度の大きさ (速さ) が最大になるのは、

変位 $x = (0)$ のところである。

単振動で速度が 0 になるのは、

変位 $x = (A)$ と $(-A)$ のところである。

単振動で加速度の大きさが最大になるのは、

変位 $x = (A)$ と $(-A)$ のところである。

単振動で加速度が 0 になるのは、

変位 $x = (0)$ のところである。

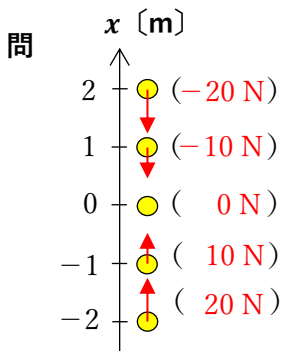
【参考】 変位の式を時間で微分すると速度の式、速度の式を時間で微分すると加速度の式になります。
変位のグラフの接線の傾きは速度のグラフ、速度のグラフの接線の傾きは加速度のグラフの変化に対応しています。

②「力」を求めよう

等速円運動を横から見た動きが、どのような加速度を持つか求まりました。物体の質量を m [kg] として、求めた加速度を運動方程式に代入すると、 $F = (-m\omega^2 x)$ となります。

m と ω は変化しないので、 $m\omega^2 = k$ (定数) とおくと、 $F = -kx$ が導かれます。

物体にはたらく力 (複数の力がはたらくているときは合力) が $F = -kx$ の形をしているとき、その物体は「単振動」します。また、質量 m と定数 k より、単振動の周期が $T = (2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ となります。



図の物体にはたらく力が $F = -10x$ [N] のとき、() 内に力の値を記せ。また、図中に力を矢印で描け。

この物体の質量を 0.10kg とすると、 $\pi = 3.14$ として、単振動の周期は (0.63 s) となる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.10}{10}} = 0.628\text{ s}$$

このように、単振動する物体にはたらく力は振動の中心からの距離に比例した大きさで、常に振動の中心を向いています。このような力を「変位に比例した (復元力) 」といいます。

● ばね振り子の物体にはたらく力を求め、単振動となることを確認しましょう

ばね定数 k [N/m] のばねに、質量 m [kg] のおもりを吊して振動させます。

図1の状態を自然長といいます。

図2はおもりを吊して静止した状態で、まだ振動していません。

このときのばねの伸びを d [m]、重力加速度の大きさを g [m/s²]

として、力のつり合いの式は、(kd) = mg となります。

図3はおもりが上下に振動しているときのある瞬間の状態です。

図2のつり合いの位置を原点として、鉛直下向きを正に x 軸をとり、

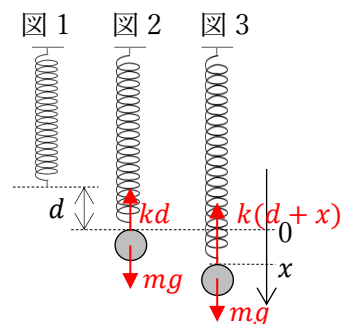
図3は原点から x [m] 下がった瞬間です。

図3のときおもりにはたらく力の合力を F [N] とすると、

$$F = (-k(d+x)) + mg = - (kx)$$

となり復元力の形をしているので、単振動することが証明されたことになります。

$m\omega^2 = k$ と $\omega = \frac{2\pi}{T}$ より、ばね振り子の周期 $T = (2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ が求まります。



問 質量 2.0kg の物体をばね定数 50N/m のばねにつないだ。このばね振り子の周期を求めよ。

$\pi = 3.14$ として計算せよ。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{2.0}{50}} = 1.256 \text{ s}$$

● 単振り子の物体にはたらく力を求め、単振動となることを確認しましょう

図のように、おもりを吊して振動させます。

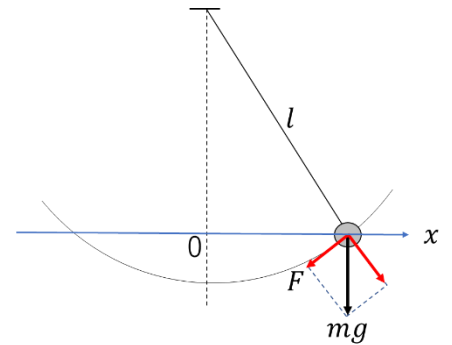
支点からおもりの重心までの長さを l [m]、おもりの質量を m [kg]、重力加速度の大きさを g [m/s²] とします。

おもりを小さく振動させたとき、おもりにはたらく振動方向の力は、図のように x 軸をとると、次のように表されます。

$$F = -\frac{mg}{l}x$$

この力が、復元力の形をしているので単振動します。

$m\omega^2 = \frac{mg}{l}$ と $\omega = \frac{2\pi}{T}$ より、単振り子の周期 $T = (2\pi\sqrt{\frac{l}{g}})$ が求まります。



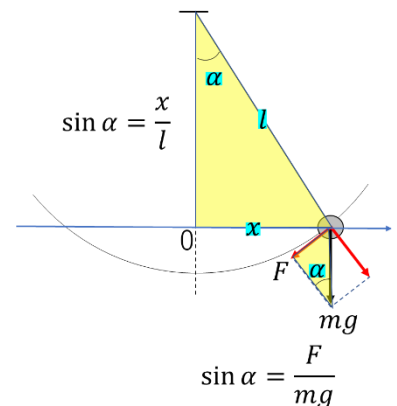
問 支点から おもりの重心までの距離が 80cm の 単振り子の周期を求めよ。

重力加速度 $g = 9.8$ [m/s²]、 $\pi = 3.14$ として計算せよ。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.80}{9.8}} = 1.79 \dots \text{ s}$$

$F = -\frac{mg}{l}x$ はつぎのように導かれます。

振り子は、糸を半径とする弧を描いて振動します。このとき、おもりにはたらく重力を弧の接線方向と半径方向に分解してみましょう。振り子を往復運動させる力は、接線方向の成分 F です。半径方向の成分は？ 糸の張力と半径方向の成分の合力は弧を描くのに使われます。おもりの速さを変化させる力ではないので、単振動を考えると無視してください。



右図のように、糸が鉛直方向から角度 α 傾いたとき、 $\sin \alpha = \frac{x}{l} = \frac{F}{mg} \therefore F = \frac{mg}{l}x$ となります。

あれ、-は？ -符号は、図の x 軸と F の向きが逆なので強引につけることになります。

x 軸と F の向きがずれているのは？ 図は説明のため振動の角度を大きく描いていますが、実際は小さく、 x 軸と F は平行と近似できるものとします。