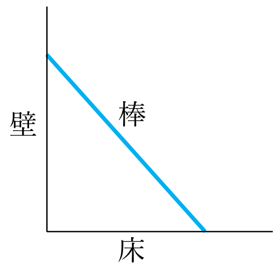
壁に立てかけた棒にはたらく摩擦力が求まらない！

生徒：先生，壁に立てかけた棒にはたらく摩擦力が求められないんです。

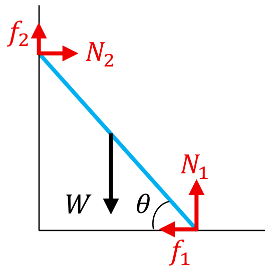
先生：どんな問題だい。

生徒：図のように，鉛直な壁と水平な床に棒を立てかけた場合です。
床と棒に摩擦があり，壁と棒に摩擦がない場合は解けました。
また，壁と棒にも摩擦がある場合で，床との摩擦力，壁との摩擦力の両方が「最大摩擦力」になっている場合も解けました。静止摩擦係数は与えられています。…　解けたんですけど，「最大摩擦力」になっていないときの値はどうなっているかなと考えたら求まらないんですよ！



先生：どんな条件設定で考えたか説明してくれ。

生徒：図のように，棒の重さ W と角度 θ が与えられていたとします。一様な棒とすると，棒の重心は棒の中央にあります。
このとき未知数は，垂直抗力 N_1 ，N_2 ，静止摩擦力 f_1 ，f_2 です。棒の長さは与えられていなくても処理の途中で消えますが，一応 l とします。
未知数を求める式は，
鉛直方向と水平方向の力のつりあい，$N_1 + f_2 = W$ … ①，$N_2 = f_1$ … ②，
床との接点のまわりの力のモーメントのつり合い，$W \times \dfrac{l}{2}\cos\theta = N_2 \times l\sin\theta + f_2 \times l\cos\theta$ … ③ の
3 本です。未知数が 4 個なので，式も 4 本必要なので，このままだと解けません。



先生：静止摩擦力 f_1 ，f_2 のどちらも最大摩擦力になっていない場合だね。

生徒：そうです。なので静止摩擦係数が与えられていても最大摩擦力の公式は使えません。
壁との接点のまわりの力のモーメントのつり合い，$N_1 \times l\cos\theta = f_1 \times l\sin\theta + W \times \dfrac{l}{2}\cos\theta$ … ④ の式を追加して解こうとしたんですけど…

先生：解けなかっただろう。①，②を用いて③のN_2，f_2を消去すると④の式になるね。モーメントの式は回転を考える点はどこを選んでもいいけど，1 本だけにしないといけないんだ。
ところで，「最大摩擦力」になっているときは，床との静止摩擦係数を μ_1 ，壁との静止摩擦係数を μ_2 とすると，$f_1 = \mu_1 N_1$ … ⑤，$f_2 = \mu_2 N_2$ … ⑥ となって，未知数より条件式の数が多くなるけど，どうした？

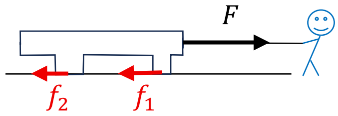
生徒：僕が解いた問題では，棒が滑り出す直前の角度を求める問題だったので，θ も未知数で，未知数の数と式の数が同じになります。
ちなみに，$\tan\theta = \dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$ となりました。それで「最大摩擦力」になる前は？と考えたんです。

先生：やるね～。ところで結論からいうと，この場合 f_1 ，f_2 はわからないんだ。

生徒：え～，でも何らかの値を持っているんですよね。どういうことですか？

先生：実は摩擦力を厳密に求める理論は確立していないんだ。平らに見えるけど接触面は拡大すると凹凸があり，表面の原子の状態も内部と異なり複雑で接触面の原子間の力を厳密に求めることができない。接触面の微小な箇所でどう力がはたらくかはわからないのだ！ただし，トータルすると外力とつり合ってはいる。

立てかけた棒だとわかりづらいから，右の図のような状態を考えよう。



物体が静止していれば，$F = f_1 + f_2$ なんだけど，動き出す直前でなければ，静止摩擦力 f_1 ，f_2 の値は計算では求まらないんだ。

ただし，何らかの方法で測定できれば値を実験的に求めることはできる。

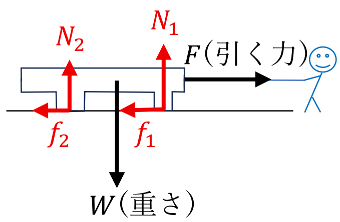
生徒：わからないということが，なんとなくわかりました。残念ですが…

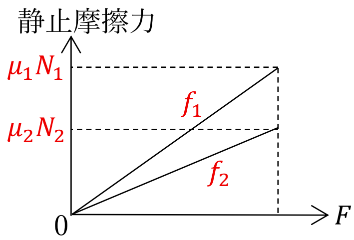
数日後

生徒：先生，この間，静止摩擦力はわからないといってましたけど，もしかすると求まるかも。

先生：どうやって？

生徒：先生の設定で引く力 F と静止摩擦力をグラフ化してみたんです。図の右側の接触面と左側の接触面の静止摩擦係数を μ_1 ，μ_2 としました。



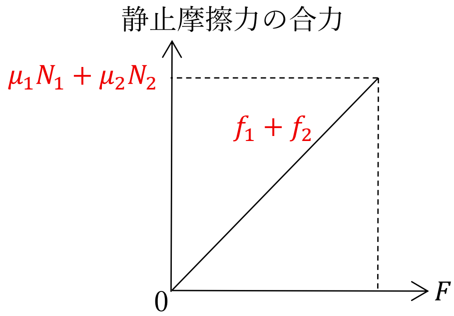


先生：ほ～，なるほど，確かに…

（しばらくして）

右図のように，摩擦力の合力 $f_1 + f_2$ は引く力 F と直線的な関係になるけど，f_1 ，f_2 が引く力 F と直線的な関係になるという根拠は？　先にどちらかが最大摩擦力になることは？

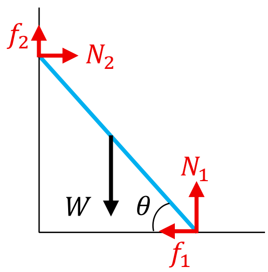
可能性としては，ありそうだが… ，実験で確かめたいね。



生徒：う～ん…

ところで，壁に立てかけた場合もグラフ化して考えたので聞いてください。

先生：OK！楽しみだ。



生徒：先日の①，②，③から，$f_2 = -\tan\theta \cdot f_1 + \dfrac{W}{2}$ ，$N_1 = \tan\theta \cdot f_1 + \dfrac{W}{2}$ ，$N_2 = f_1$

として，未知数を変数として関係式を求めました。θ は定数とします。

これを元に，横軸に f_1 ，縦軸に各力をとると図 1 のようになります。

これに $\mu_1 N_1$ と $\mu_2 N_2$ のグラフを書き込んだのが図２です。μ_1 ，μ_2 は１より小さいとしました。
ここで $f_1 \leqq \mu_1 N_1$ ，$f_2 \leqq \mu_2 N_2$ を考慮すると，未知数の可能な範囲が図のようになります。この範囲内でいずれかの値をとって止まっているというのが，なんとなくわかったような気がします。
また，θ を小さくしていくと可能な範囲が狭くなり，図３のとき，棒が滑り出す直前となります。

図１

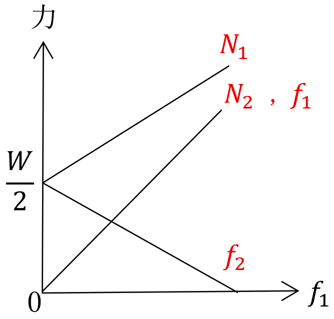


図２

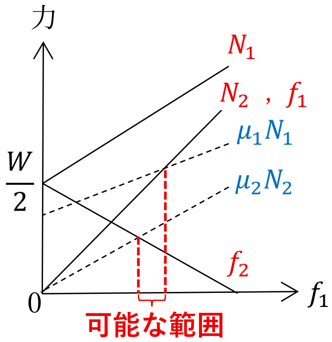
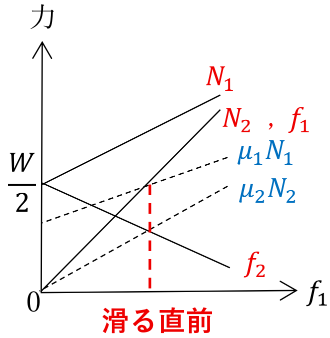


図３



先生：すごい！摩擦力や垂直抗力が，状況によりどのように変化するか分かるね。実験で測定する方法を検討してみようか。